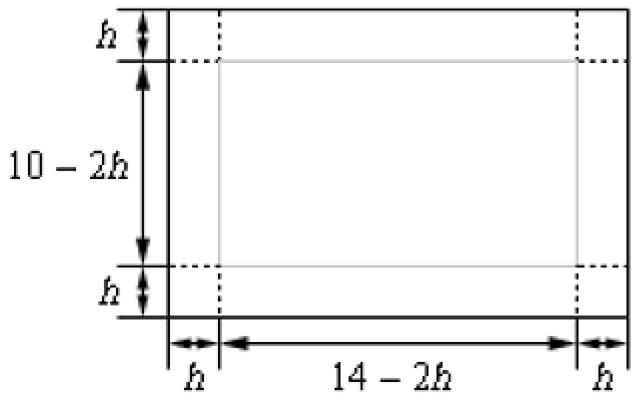
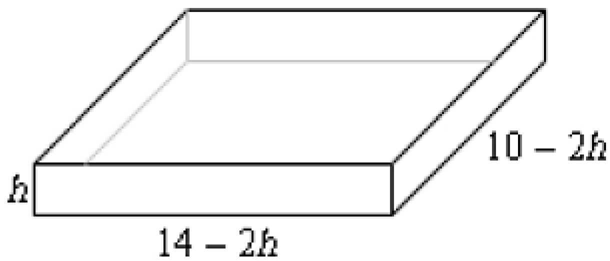
بهینه سازی بیشترین حجم با روش closed interval

ما می خواهیم یک تکه مقوای نازک که ابعاد آن ۱۴ در ۱۲ اینچ می باشد را به صورت شکل زیر از هم جدا کنیم



سپس با توجه به شکل ایجاد شده لبه ها را به سمت بالا تا کنیم تا جعبه ای به شکل زیر تولید شود:



هدف تعیین بلندی h می باشد به طوری که جعبه بیشترین حجم را داشته باشد.

حل مسئله:

این مسئله را می توان از دو روش حل کرد یکی روش بازه بسته یا closed interval و یکی هم آزمون مشتق اول که در این گزارش به روش اول می پردازیم و در گزارش بعدی به روش دوم برای همین مسئله خواهیم پرداخت.

اولین کاری که باید بعد از تشخیص شکل و رسم آن انجام داد به دست آوردن مدل ریاضی مسئله می‌باشد که داریم:

$$\text{Maximize: } V = h(14 - 2h)(10 - 2h) = 140h - 48h^2 + 4h^3$$

که با توجه به اینکه پهنا عددی مثبت است پس :

$$10 - 2h \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad 10 \geq 2h \quad \Longrightarrow \quad 5 \geq h$$

که h نیز خودش مثبت است پس محدوده h خواهد بود: $0 \leq h \leq 5.$

حال به دنبال پیدا کردن اکسترمم مطلق این تابع هزینه می باشیم که با این روش بیشینه حجم را به دست خواهیم آورد:

Closed Interval Method:

$$V'(h) = (140h - 48h^2 + 4h^3)' = 140h' - 48(h^2)' + 4(h^3)' = 140 - 48 \cdot 2h + 4 \cdot 3h^2 = 140 - 96h + 12h^2$$

حال برای پیدا کردن نقاط بحرانی کافیست معادله درجه دوم بالا را حل کنیم که خواهیم داشت:

$$140 - 96h + 12h^2 = 0 \implies h = \frac{-(-96) \pm \sqrt{(-96)^2 - 4 \cdot 12 \cdot 140}}{2 \cdot 12} = \frac{12 \pm \sqrt{39}}{3} \approx 1.9183,\ 6.0817$$

که با توجه به اینکه $0 \leq h \leq 5$ پس فقط مقدار زیر قابل قبول است:

$$h = \frac{12 - \sqrt{39}}{3} \approx 1.9183.$$

برای پیدا کردن بیشترین حجم بررسی می کنیم تابع هزینه رو در نقاط ابتدایی و انتهایی و نقطه بحرانی:

$$V(0) = 0, \qquad V\left(\frac{12 - \sqrt{39}}{3}\right) \approx 120.1644, \qquad V(5) = 0$$

پس با این روش بیشترین حجم در بلندای $h = \frac{12 - \sqrt{39}}{3}$ اتفاق می افتد که عبارت است از:

$$120.1644 \text{ in}^3$$